В.Ф. Зайцев

Российский государственный университет им. А.И. Герцена, valentin_zaitsev@mail.ru

НЕЛОКАЛЬНЫЕ СИММЕТРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. ПРОБЛЕМЫ И ДОСТИЖЕНИЯ

Проблема поиска точного аналитического решения дифференциальных уравнений в замкнутом виде была и остаётся одной из актуальных проблем математики. Основным классическим методом решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) был поиск подходящего преобразования, переводящего это уравнение в другое, решение которого уже известно. Теоретически на этом пути имелись неисчерпаемые возможности синтеза любого количества уравнений с известными решениями — произвольная (обратимая) подстановка переводит любое интегрируемое уравнение в целый класс уравнений, разрешимых с помощью обратного преобразования. Однако оказывается, что среди найденных таким образом классов уравнений практически невозможно найти то единственное, решение которого мы ищем, — отсутствует эффективный алгоритм отбора. Попытка же найти прямым методом требуемые преобразования приводит к необходимости решения нелинейной системы уравнений с частными производными относительно искомых элементов преобразования – задаче более сложной, чем решение исследуемого уравнения.

В конце XIX века норвежский математик Софус Мариус Ли (1842 – 1899) предложил принципиально другой подход — поиск однопараметрической непрерывной группы автопреобразований уравнения. Совершенно очевидно, что знание частного (но не инвариантного относительно этой группы!) решения сразу же приводит к отысканию однопараметрического семейства частных решений или, для уравнений 1-го порядка, к отысканию общего решения, ибо группа Ли, переводя уравнение "в себя", переводит и любое его решение снова в решение. Но возможности нового подхода оказались существенно шире – оказалось, что знание допускаемой однопараметрической группы позволяет проинтегрировать уравнение 1-го порядка и без знания частного решения. Это происходит в силу **принципа подобия**: все однопараметрические точечные группы преобразований плоскости подобны в том смысле, что любая такая группа подходящим точечным преобразованием может быть переведена в любую наперед заданную, например, в группу переноса по оси x. При этом уравнение, её допускающее, переходит в автономное — уравнение 1-го порядка сразу интегрируется, а если исходное уравнение имеет порядок выше первого, указанная процедура позволяет понизить порядок на единицу.

С. Ли разработал стройную теорию, получившую в дальнейшем название группового анализа дифференциальных уравнений. Поиск допускаемых точечных групп (для уравнений порядка выше первого) производится с помощью регулярного алгоритма, основанного на переходе от локальной однопараметрической группы к инфинитезимальному оператору — оператору бесконечно-малого преобразования. При этом все определяющие уравнения становятся линейными, а множество их решений — допускаемых операторов — образует алгебру Ли. Если уравнение n-го порядка допускает n-мерную разрешимую алгебру Ли, его можно проинтегрировать в квадратурах. Этот результат полностью аналогичен выводам теории Галуа для алгебраических уравнений с тем лишь отличием, что алгоритмы теории Ли позволяют решать и обратные задачи — строить классы уравнений, имеющих заданную симметрию или класс симметрий.

В середине XX века идеи Ли были успешно применены для поиска решений нелинейных уравнений математической физики. Оказалось, что групповой анализ позволяет находить частные решения специального вида, инвариантные относительно некоторых групп преобразований, в частности, автомодельные. Однако вскоре возникла парадоксальная ситуация – техника поиска точных аналитических решений обыкновенных дифференциальных уравнений начала существенно отставать от достижений группового анализа уравнений в частных производных. А ведь именно решение ОДУ является конечным этапом разыскания инвариантных решений модельных уравнений математической физики. Если для обыкновенных дифференциальных уравнений применение допускаемой группы позволяет понизить порядок уравнения, то для уравнения в частных производных поиск инвариантного относительно допускаемой группы решения позволяет понизить размерность исследуемого уравнения, редуцируя его в конечном итоге к одномерному, т. е. к обыкновенному. А "репертуар" разрешимых в замкнутом виде ОДУ оставался с конца XIX века, по сути, неизменным, несмотря на появление известного справочника Э. Камке и многочисленные попытки применения классических алгоритмов группового анализа к новым классам уравнений.

В данных условиях напрашивался единственный выход — обобщить симметрийные идеи Софуса Ли, тем более что сам С. Ли рассматривал вопрос о существовании касательных преобразований высшего порядка (выяснилось, что все локальные преобразования, сохраняющие условия касания порядка выше единицы, — продолженные точечные или касательные первого порядка, которые часто называются контактными). Оставалась единственная возможность — допустить зависимость координат оператора от производных сколь угодно высокого порядка вплоть до бесконечного. Оказалось возможным определить формальную однопараметрическую группу Ли – Беклунда, и на её основе — инфинитезимальный оператор Ли – Беклунда, представимый в виде формального ряда. Н.Х. Ибрагимов и Р. Андерсон называют симметрии этого вида симметриями Ли – Беклунда [1, 2], однако этот термин не является общепризнанным. Так, П. Олвер использует термин "обобщенные симметрии" [3], считая, что подобные группы симметрий введены Эмми Нётер, но термин "преобразования Нётер" уже имеет несколько других значений. Встречается также термин "динамические симметрии" [4] — это симметрии Ли – Беклунда на многообразии исследуемого уравнения. В любом случае оставался открытым вопрос о поиске симметрий такого вида: представление координат оператора в форме бесконечных рядов приводило к весьма существенным вычислительным трудностям. Заметим, что поиск таких симметрий в общем виде заранее обречен на неудачу: аналогично поиску симметрий уравнения первого порядка, мы получим либо "пустые" операторы, не дающие редукции, либо операторы, инварианты которых представимы через общее решение исходного уравнения, которое нам заведомо не известно. Тем не менее, важно то обстоятельство, что перечисленные выше операторы образуют алгебры Ли.

Поэтому для того чтобы найти новые интегрируемые классы уравнений, востребованные в приложениях, необходимо использовать некоторый анзац — искать допускаемый оператор в том или ином конкретном виде. Очень перспективной формой операторов Ли – Беклунда является интегральная — в ряде случаев бесконечный ряд можно "свернуть" в замкнутом виде, использовав оператор D_x^{-1} (оператор, обратный оператору полной производной, т. е. "полный" интеграл, в котором интегрирование проводится по всем x, входящим явно и неявно). Естественно, указанный интеграл является уже нелокальной переменной. И к тому же далеко не всякий формальный ряд можно "свернуть". Однако для поиска таких операторов можно указать регулярные алгоритмы, трудоёмкость которых ненамного превосходит трудоёмкость поиска точечных операторов. Их применение позволило найти широкие классы уравнений, которые можно проинтегрировать в замкнутом виде, несмотря на то, что они не допускают никаких точечных групп. Наиболее прост алгоритм для операторов, в которых нелокальная переменная входит под знак экспоненты (экспоненциальные нелокальные операторы — ЭНО, у П. Олвера [3] — экспоненциальное векторное поле).

К сожалению, наряду с преимуществами у интегральных форм есть и недостатки. С одной стороны, введение ЭНО выглядит как вполне естественное обобщение локальных операторов (точечных и касательных). К ЭНО приводится в результате преобразования понижения порядка точечный оператор, если для этой операции используется оператор, не образующий идеала в исходной алгебре Ли ("неправильное понижение порядка"). С другой — мы неизбежно теряем ряд преимуществ группового анализа, причем, чем выше уровень обобщения, тем больше. Укажем некоторые из них.

1. Для точечных однопараметрических групп хорошо известен принцип подобия (см. выше). Поиск новых переменных, в которых допускаемый оператор является оператором переноса, сводится к разысканию одного (нетривиального) решения системы линейных уравнений в частных производных первого порядка – практически достаточно найти инвариант этой группы. Для ЭНО это не так — в получающейся системе только первое уравнение может быть решено (и его решение дает универсальный инвариант), а второе становится интегро-дифференциальным. Поэтому для редукции уравнения, допускающего ЭНО, остается только один путь — факторизация исходного уравнения (см. далее).
2. Для нелокальных операторов, не являющихся ЭНО, ситуация ещё сложнее: в ряде случае не удается найти даже первый дифференциальный инвариант (он может и не существовать). Это означает, что для редукции уравнений 2-го порядка такие операторы вообще бесполезны (точно так же, как допускаемая уравнением первого порядка $y' = F(x, y)$ "пустая" бесконечномерная точечная алгебра Ли, заданная оператором $X_\infty = \xi\partial_x + \xi F\partial_y$, где $\xi(x, y)$ — произвольная функция двух переменных).
3. Координаты локальных операторов, допускаемых дифференциальными уравнениями, являются решениями линейных определяющих систем в частных производных, поэтому они образуют линейное векторное пространство. Легко доказывается, что множество операторов образует алгебру Ли, её размерность определяется размерностью множества решений определяющей системы. Для нелокальных операторов (в частности, для ЭНО) определяю-

щие системы нелинейны, и ниоткуда не следует, что их решения образуют алгебру Ли. Последовательное вычисление коммутаторов допускаемых операторов (а в том, что коммутатор допускаемых операторов тоже допускается, сомнений нет) дает сколь угодно большой набор "пустых" объектов. П. Олвер показал [5], что такие множества не являются алгебрами Ли, так как в них не выполняется тождество Якоби (!). Тем самым мы теряем ещё одно важное свойство — по существу, вместо стройной структуры алгебры Ли и полного описания возможностей редукции, а также описания всех различных инвариантных решений для уравнений в частных производных на основе перечисления неподобных подалгебр и построения оптимальной системы подалгебр мы получаем лишь множество допускаемых операторов, причем возможность нетривиальной редукции уравнения с помощью каждого из них надо ещё доказать.

4. Всякая допускаемая локальная группа переводит решение уравнения снова в решение того же уравнения. Тем самым мы можем "размножать" неинвариантные решения и получать из одного решения однопараметрическое семейство (т. е. его орбиту). В случае нелокальных операторов мы теряем и это свойство. Даже если и удается "восстановить" вид группы решением соответствующих уравнений Ли, в выражения для преобразованных переменных наряду с исходными входит и нелокальность, что превращает новое решение в некое подобие интегрального уравнения.

Поэтому необходима разработка новой теории — теории нелокальных операторов. Основы этой теории заложены в теоремах о факторизации. Рассмотрим ОДУ n-го порядка

$$y^{(n)} = F\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right). \tag{1}$$

Теорема 1 [6], [7]. *Произвольное дифференциальное уравнение* (1) *факторизуется до системы специального вида*

$$\begin{cases} z^{(n-1)} = G\left(x, z, z', \dots, z^{(n-2)}\right), \\ z = H(x, y, y'), \quad \dfrac{\partial z}{\partial y'} \neq 0, \end{cases} \tag{2}$$

если и только если уравнение (1) *допускает ЭНО*

$$X = \exp\left(-\int \frac{H_y}{H_{y'}}\, dx\right) \partial_y. \tag{3}$$

Очевидно, что функция H является первым дифференциальным инвариантом оператора (3), а утверждение теоремы 1 содержит классический метод понижения порядка уравнения, предусмотренный теорией С. Ли — в этом случае второе уравнение системы (2) всегда решается в квадратурах. Вместе с тем интегрироваться может первое уравнение, и порядок исходного уравнения тоже понижается, но классической теорией этот случай не предусмотрен. Заметим, что иная (не вполне корректная) формулировка теоремы 1 приведена в [3] (упражнение 2.30).

Следствие теоремы 1. *Для полного группового анализа ОДУ второго порядка достаточно найти допускаемые этим уравнением ЭНО.*

Для упрощения алгоритма поиска ЭНО может быть представлен в виде

$$X = \exp\left(\int \zeta(x, y, y')\, dx\right)\left(\xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y\right) \qquad (4)$$

с последующей конкретизацией зависимости функции ζ от третьего аргумента. Наличие локального множителя позволяет задать "нулевой" инвариант, исходя из требования априорной симметрии (например, в задачах моделирования).

Теорема 2 [6], [7]. *Произвольное дифференциальное уравнение* (1) *факторизуется до системы специального вида*

$$\begin{cases} z^{(n-k)} = G\left(x, z, z', \dots, z^{(n-k-1)}\right), \\ z = H\left(x, y, y', \dots, y^{(k)}\right), \quad \dfrac{\partial z}{\partial y^{(k)}} \neq 0, \end{cases} \qquad (5)$$

если уравнение (1) *допускает некоторый нелокальный оператор, для которого* $H\left(x, y, y', \dots, y^{(k)}\right)$ *является* ***младшим*** *дифференциальным инвариантом на многообразии, заданном уравнением* (1). *Если уравнение* (1) *факторизуется до системы* (5), *то оно допускает некоторый нелокальный оператор, для которого* $H\left(x, y, y', \dots, y^{(k)}\right)$ *является дифференциальным инвариантом порядка* k *на многообразии* (1).

В качестве примера можно привести уравнение

$$yy''' + \left(y''\right)^2 - y'y'' + 2Ay^{-3}(y'' - 2y') + A^2y^{-6} = f(x)y^2, \qquad (6)$$

где $f(x)$ — произвольная функция, A — произвольная константа. Оно факторизуется до системы

$$\begin{cases} z' + z^2 = f(x), \\ z = \dfrac{y''}{y} + Ay^{-4}. \end{cases} \qquad (7)$$

Очевидно, выражение $H = y''/y + Ay^{-4}$ не является точной полной производной, поэтому H — младший дифференциальный инвариант допускаемого уравнением (6) нелокального оператора. Заметим, что уравнение (6) полностью редуцируется: решение первого уравнения системы (7) представимо через фундаментальную систему решений линейного уравнения $u'' = f(x)u$, а решение второго — классического уравнения Ермакова — через фундаментальную систему решений линейного уравнения $v'' = z(x)v$.

Следствие теоремы 2. *Симметрия, определяемая нелокальным оператором, является первым интегралом (законом сохранения), если и только если система* (5) *имеет вид*

$$\begin{cases} z' = 0, \\ z = H\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right). \end{cases}$$

Очевидно, функция $H = \mathrm{const}$ *и является первым интегралом исходного уравнения* (1).

Заметим, что для решения ОДУ n-го порядка знание n функционально-независимых первых интегралов удобнее для интегрирования, чем знание n-мерной допускаемой алгебры Ли. Рассматривая n первых интегралов как алгебраическую систему n уравнений, мы можем, исключив из них производные, найти общий интеграл исходного уравнения алгебраическими методами, тогда как найдя алгебру Ли, надо доказать её разрешимость и последовательно понижать порядок уравнения n раз.

Вместе с тем, общий вид нелокального оператора, порождающего факторизацию вида (5), остаётся неизвестным, и становится понятным интерес к различным формам нелокальных операторов, процедурам поиска которых посвящено в последние годы немало исследований. Многообразие форм и свойств нелокальных операторов приводит к выводу о том, что на первый план выступает технологическая проблема выбора вида оператора, для которого задача поиска симметрии для данного класса ОДУ будет разрешимой. Поэтому наиболее актуальной становится обратная задача — поиск классов ОДУ, допускающих оператор заданного вида.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ibragimov N.H., Anderson L.R. *Lie – Bäcklund tangent transformations* // J. Math. Anal. and Appl. – 1977. – V. 59. – No 1. – P. 145-162.

2. Ибрагимов Н.Х. *Группы преобразований в математической физике.* – М.: Наука, 1983. – 280 с.

3. Олвер П. *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям.* – М.: Мир, 1989. – 640 с.

4. Stephani H. *Differentialgleihungen. Symmetrien und Lösungsmethoden.* – Heidelberg – Berlin – Oxford: Spectrum Akademischer Verlag, 1994. – 320 p.

5. Olver P.J., Sanders J.A., Jing Ping Wang. *Ghost Symmetries* // J. of Nonlinear Mathematical Physics. – V. 20. – P. 1-9.

6. Zaitsev V.F. *Universal description of symmetries on a basis of the formal operators* // Proc. of the Int. Conf. MOGRAN–2000 "Modern Group Analysis for the new Millenium". – Ufa: USATU Publishers, 2001. – P. 157-160.

7. Зайцев В.Ф. *Формальные операторы и теоремы о факторизации обыкновенных дифференциальных уравнений* // Труды III Межд. конф. "Симметрия и дифференциальные уравнения". – Красноярск, 2002. – С. 101-105.